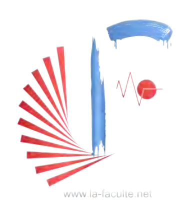
In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful






Introduction aux probabilités

Definition (approche fréquentielle d'une probabilité): on considère une expérience pouvant donner lieu à un événement A. On répète l'expérience N fois et on compte le nombre N_A fois où l'événement A est apparu. Pour N assez grand la probabilité de 'événement A est approximée par la fréquence $\frac{N_A}{N} = P(A)$. On note P(A) cette probabilité, et on adoptera les ntations suivantes:

Si A et B sont deux événements

- A$\subset B$ qui signifie que A implique B ou que A entraine B.

- A$\cup B$ A ou B

- A$\cap B$ A et B

-$\overline{A}$ contraire de A

- Φ évt impossible

- Ω evt certain

- A$\cap B = \Phi$ A et B sont incompatibles

- $\sum A_i = \Omega$ et le systeme A_i est incompatible système complet d'evts. un des evts est toujours réalisé.

propriétes de la probabilité P

- P$(\Omega) = 1$ et P$(\Phi) = 0$

- P$(A + B) = P(A) + P(B)$

- P$(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- P$(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- P$(B) = \sum P(A_i \cap B)$ formule des probabilités totales ou formule de décomposition de la probabilité d'un événement suivant un système complet d'evts.$\sum A_i = \Omega$ et (A_i) est appelé système complet d'evts

probabilité conditionnelle

Si un evt B est réalisé, la probabilité de réalisation de d'un evt A sous cette condition notée P(A/B) est définie par P$(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

Si B_1 et B_2 forment un système complet d'évts alors pour tout evt A P$(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(A/B_1)\, P(B_1) + P(A/B_2)\, P(B_2)$ et

P$(B_1/A) = \dfrac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/B_1)\, P(B_1)}{P(A/B_1)\, P(B_1) + P(A/B_2)\, P(B_2)}$ de même on a: P$(B_2/A) = \dfrac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/B_2)\, P(B_2)}{P(A/B_1)\, P(B_1) + P(A/B_2)\, P(B_2)}$

ces formules sont appelées formules de Bayes ou formules des probabilités des causes.

Exemples de calculs des probabilités:

Ex1: Un composant ne peut fonctionner que si la température ambiante est compris dans un intervalle $[T_1, T_2]$ $(T_1 < T_2)$ .On considère alors les evts:

- A " la température est plus petite que T_2" et $P(A) = 0.6$

- B " la température est plus grande que T_1" et $P(B) = 0.75$

Donner la probabilité de fct du composant.

La probabilité à chercher est $P(A \cap B)$

En utilisant l'une des formules plus haut on a: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ avec $P(A \cup B) = 1$

d'où: $P(A \cap B) = 0.6 + 0.75 - 1 = 0.35$

Ex2: Un entreppreneur désirant prendre un projet de construction sur un site pour lequel:

- les conditions sont bonnes avec probabilité 0.6 evt B

- les conditions sont mauvaises avec probabilité 0.4 evt M

Si le site est bon la probabilité de completer le projet à temps est 0.9

Si le site est mauvais la probabilité de completer le projet à temps est 0.5

Donner la probabilité P(T) que l'entrepreneur termine le projet à temps: On a:

P$(T) = P\,(T/B)\,P\,(B) + P\,(T/M)\,P\,(M)$

P$(T) = 0.9 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 = 0.74$

Sachant que le projet soit entrepris à temps donner la probabilité qu'il le soit sous de bonnes conditions, c'est la prob P$(B/T) = \dfrac{P\,(T/B)\,P\,(B)}{P\,(T)} = 0.73$

On a aussi P$(M/T) = \dfrac{P\,(T/M)\,P\,(M)}{P\,(T)} = 0.27$

Ex3: Un avion possède 3 ordinateurs à bord et qui fonctionnent avec les probabilités 0.7, 0.8 et 0.9 respectivement. les ordinateurs fonctionnent indépendement les uns des autres.

a) l'avion est piloté automatiquement si au moins 2 ordinateurs fonctionnent, quelle est la prob de cet evt?

$0.7 \times 0.8 \times 0.1 + 0.7 \times 0.9 \times 0.2 + 0.8 \times 0.9 \times 0.3 + 0.7 \times 0.8 \times 0.9 = 0.902$

b) l'avion est en panne si aucun ordinateur ne fonctionne, quelle est la prob de cet evt?

$0.1 \times 0.2 \times 0.3 = 0.006$

Ex4: Une compagnie d'assurance estime que 40% des clients ayant un contrat auto renouvellent l'année suivante et 60% des clients ayant un contrat habitation renouvellent l'année suivante. La compagnie estime aussi que 80%

des clients ayant simultanément un contrat auto et habitation renouvellent l'année suivante. Un fichier des clients de la compagnie montre aussi que:

- 65% des clients ont une assurance auto
- 50% des clients ont une assurance habitation
- 15% des clients ont une assurance auto+habitation

Donner alors le pourcentage des clients qui renouvellent au moins un contrat.

Soit alors l'evt A "un client a un contrat auto" et H l'evt "un client a une assurance habitation"

D'où $P(A) = 0.65 \quad P(H) = 0.50$ et $P(A \cap H) = 0.15$

$P\left(A \cap \overline{H}\right) = P(A) - P(A \cap H) = 0.65 - 0.15 = 0.50$

$P\left(\overline{A} \cap H\right) = P(H) - P(A \cap H) = 0.50 - 0.15 = 0.35$

le pourcentage de clients renouvelant au moins une fois est donné par: $0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.35 + 0.8 \times 0.15 = 0.53$

Ex5: Un test sanguin a une probabilité de 0.95 de detecter un certain virus lorsque celui ci est effectivement présent. Il donne néamoins un faux resultat positif pour 1% des personnes non infectées. si 0.5% de la population est porteuse du virus, quelle est la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle a un test positif?

Soit V l'evt "personne testée a le virus" et T l'evt "personne testée a un test positif" on doit alors calculer P(V/T)

on P$(V) = 0.005$ P$(T/V) = 0.95$ et $P\left(T/\overline{V}\right) = 0.01$

on a aussi $P\left(V/T\right) = \dfrac{P\left(T/V\right)P\left(V\right)}{P\left(T/V\right)P\left(V\right) + P\left(T/\overline{V}\right)P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} =$ 0.323

et $P\left(\overline{V/T}\right) = \dfrac{P\left(T/\overline{V}\right)P\left(\overline{V}\right)}{P\left(T/V\right)P\left(V\right) + P\left(T/\overline{V}\right)P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0.01 \times 0.995}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} =$ 0.677